МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Г. Ф. МОРОЗОВА»

МАТЕМАТИКА

Методические указания
к выполнению расчетно-графических работ
для студентов по направлению подготовки
15.03.02 – Технологические машины и оборудование

Воронеж 2018

УДК 517.9

Веневитина, С.С. Математика [Электронный ресурс] : методические указания к выполнению расчетно-графических работ для студентов по направлению подготовки 15.03.02 – Технологические машины и оборудование / С.С. Веневитина, И.В. Сапронов, Н.М. Спирина; М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВО «ВГЛТУ». – Воронеж, 2018. – 36 с.

Одобрено решением учебно-методического совета ФГБОУ ВО «ВГЛТУ» (протокол № 6 от 23.03.2018)

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор Воронежского государственного педагогического университета В.В. Обуховский

Методические указания к выполнению расчетно-графических работ по дисциплине «Математика» предназначены для студентов ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет», обучающихся по направлению подготовки 15.03.02 – «Технологические машины и оборудование».

Дисциплина «Математика» изучается в течение двух семестров, в каждом из которых необходимо выполнить одну РГР.

Предложены несколько вариантов расчетно-графических работ по каждому из разделов «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Математическая статистика».

В целях качественного выполнения студентами расчетно-графических работ даны необходимые рекомендации и образцы выполнения этих работ. Они будут особенно полезны при самостоятельном изучении дисциплины «Математика».

Материалы данной учебно-методической разработки по содержанию, форме изложения и объёму соответствуют задачам дисциплины и требованиям стандарта соответствующего направления подготовки.

Оглавление

1. РГР №1 «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

1.1. Теоретический материал.

Правила дифференцирования:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$; $\quad C = const$;
4. $\left(\dfrac{u}{C}\right)' = \dfrac{1}{C} \cdot u'$, $\quad C = const$;
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;
6. $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = C \cdot (v^{-1})' = -\dfrac{C \cdot v'}{v^2}$, $\quad C = const$.

Производная сложной функции

Если функция $u = \varphi(x)$ *имеет производную* u_x' *в точке* x, *а функция* $y = f(u)$ *имеет производную* y_u' *в соответствующей точке* $u = \varphi(x)$, *то сложная функция* $y = f(\varphi(x))$ *имеет производную* y_x' *в точке* x, *которая находится по формуле*

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'.$$

Производные основных элементарных функций (таблица производных)

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
2. $(x)' = 1$; $\qquad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\qquad \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$;
10. $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
14. $(arctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется ***производной первого порядка***.

Если функция $y' = f'(x)$ дифференцируема, то ее производная $(y')' = (f'(x))'$ называется ***производной второго порядка*** и обозначается y'' или $f''(x)$.

Производная от производной второго порядка $(y'')' = (f''(x))'$ называется ***производной третьего порядка*** и обозначается y''' или $f'''(x)$.

Производной n***-го порядка*** (или n-й поизводной) называется производная от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Применение производной к исследованию функций

Необходимые условия возрастания (убывания) функции:

Если дифференцируемая на интервале (a,b) *функция* $f(x)$ *возрастает (убывает), то* $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in(a,b)$ *(* $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in(a,b)$.

Достаточные условия возрастания (убывания) функции:

Если функция $f(x)$ *дифференцируемая на интервале* (a,b) *и* $f'(x)>0$, $\forall x\in(a,b)$, *то эта функция* $f(x)$ *возрастает на интервале* (a,b).

Если функция $f(x)$ *дифференцируемая на интервале* (a,b) *и* $f'(x)<0$, $\forall x\in(a,b)$, *то эта функция* $f(x)$ *убывает на интервале* (a,b).

Необходимые условия существования экстремума функции:

Если дифференцируемая функция $f(x)$ *имеет экстремум в точке* x_0, *то ее производная в этой точке равна нулю:* $f'(x_0)=0$.

Достаточные условия существования экстремума функции:

Если непрерывная функция $f(x)$ *дифференцируема в некоторой* δ*-окрестности критической точки* x_0 *и при переходе через нее (слева направо) производная меняет знак, то* x_0 *– точка экстремума.*

Если знак меняется с плюса на минус, то x_0 *– точка максимума.*

Если знак меняется с минуса на плюс, то x_0 *– точка минимума.*

Достаточные условия выпуклости (вогнутости) графика функции:

Если функция $f(x)$ *во всех точках интервала* (a,b) *имеет отрицательную вторую производную, то есть* $f''(x)<0,\ \forall x\in(a,b)$, *то ее график – выпуклый (выпуклый вверх) на интервале* (a,b).

Если функция $f(x)$ *во всех точках интервала* (a,b) *имеет положительную вторую производную, то есть* $f''(x)>0,\ \forall x\in(a,b)$, *то ее график – вогнутый (выпуклый вниз) на интервале* (a,b).

Достаточные условия существования точек перегиба:

Если вторая производная $f''(x)$ *меняет знак при переходе через точку* x_0 *(в которой* $f''(x_0)=0$ *или* $f''(x_0)$ *не существует), то точка графика с абсциссой* x_0 *– точка перегиба.*

1.2. Варианты Расчетно-графической работы по теме «Полное исследование функции и построение ее графика»

Задание: Исследовать методами дифференциального исчисления функции и на основании результатов исследований построить их графики.

Вариант 1	а) $y=3x-x^3;$	б) $y=\frac{x^2}{x^2-1};$
Вариант 2	а) $y=\frac{1}{8}\ \ x^3-3x^2-9x+27\ \ ;$	б) $y=\frac{x^3+4}{3x^2};$
Вариант 3	а) $y=\frac{1}{8}\ \ x^3+12x^2+36x\ \ ;$	б) $y=\frac{1}{x^2-2x+2};$
Вариант 4	а) $y=3x^2-x^3;$	б) $y=\frac{1}{x^2-4x+3};$
Вариант 5	а) $y=\frac{1}{8}\ \ x^3-12x\ \ ;$	б) $y=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2;$
Вариант 6	а) $y=\frac{1}{6}\ \ 2x^3+21x^2+60x\ \ ;$	б) $y=\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2;$
Вариант 7	а) $y=\frac{1}{8}\ \ x^3+6x^2\ \ ;$	б) $y=\frac{x^3}{6-2x^2};$
Вариант 8	а) $y=\frac{1}{9}\ \ x^3-6x^2+9x-54\ \ ;$	б) $y=\frac{x^3}{2x^2-8};$
Вариант 9	а) $y=\frac{1}{2}\ \ x^3-3x^2\ \ ;$	б) $y=\frac{x^2-x+4}{2x};$
Вариант 10	а) $y=\frac{1}{6}\ \ 2x^3-21x^2+60x\ \ ;$	б) $y=\frac{x^2+x+\frac{3}{2}}{2x-1};$
Вариант 11	а) $y=x^3-3x;$	б) $y=\frac{x^4}{x^3-1};$
Вариант 12	а) $y=12x-x^3;$	б) $y=\frac{x^4}{x}+\frac{1}{x^4};$
Вариант 13	а) $y=\frac{x^3}{3}+x^2;$	б) $y=x+\frac{4}{x+2};$

Вариант 14	а) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;	б) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$;
Вариант 15	а) $y = x^3 - 2x^2 + x$;	б) $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$;
Вариант 16	а) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$;	б) $y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$;
Вариант 17	а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$	б) $y = x + \frac{1}{x}$;
Вариант 18	а) $y = x^3 + 5x^2 + 3x + 5$	б) $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$;
Вариант 19	а) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$;	б) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$;
Вариант 20	а) $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 1$;	б) $y = \frac{2}{x^2 + x + 1}$;
Вариант 21	а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$;	б) $y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$;
Вариант 22	а) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$;	б) $y = \frac{x^3 - 8}{2x^2}$;
Вариант 23	а) $y = 3x^5 - 5x^3$;	б) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;
Вариант 24	а) $y = x^4 - 2x^2 - 3$;	б) $y = \frac{4x}{4 + x^2}$;
Вариант 25	а) $y = x^4 - 2x^3 + 3$;	б) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$.
Вариант ⊗	а) $y = x^3 + 2x^2 + x + 2$	б) $y = \frac{x^3}{3\;4 - x^2}$

1.3. Образец выполнения РГР.

а) $y = x^3 + 2x^2 + x + 2$

Проведем исследование функции по следующей схеме:

1. Область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Вид функции. Выясним, является ли функция четной или нечетной.

Если $y(-x) = y(x)$ для любого x из области определения функции $y = f(x)$, то эта функция называется четной. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Если $y(-x) = -y(x)$ для любого x из области определения функции $y = f(x)$, то эта функция называется нечетной. График нечетной функции симметричен относительно начала системы координат.

Для нашей функции:

$$y(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2,$$
$$y(-x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2,$$
$$-y(x) = -x^3 - 2x^2 - x - 2.$$

Равенства $y(-x) = y(x)$ и $y(-x) = -y(x)$ нарушены, например, при $x = 1$ $(y(1) = 6, y(-1) = 2, -y(1) = -6)$, поэтому функция не является четной и не является нечетной.

3. Точки пересечения графика функции с осями координат.

Выясним, пересекается ли график функции с осью Ox, и найдем координаты точек пересечения, если эти точки имеются. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = x^3 + 2x^2 + x + 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ (x+2)(x^2+1) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x + 2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x = -2. \end{cases}$$

Итак, $(-2; 0)$ - точка пересечения графика функции с осью Ox.

Так как $0 \in D(y)$, то график пересекается с осью Oy. Для нахождения координат точки пересечения решим систему уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = x^3 + 2x^2 + x + 2. \end{cases}$$

Отсюда (0;2) - точка пересечения графика с осью Oy.

4. Исследование функции по 1-й производной (интервалы монотонности, точки экстремума).

Найдем 1-ю производную функции:

$$y' = (x^3 + 2x^2 + x + 2)' = 3x^2 + 4x + 1.$$

$y' = 0$ при $x = -1$ и при $x = -\dfrac{1}{3}$. Точек, в которых y' не существует, нет. Точки $x_1 = -1$ и $x_2 = -\dfrac{1}{3}$ разбивают числовую ось на три интервала $(-\infty; -1), (-1; -\dfrac{1}{3})$, $(-\dfrac{1}{3}; +\infty)$. Определим знак производной y' на каждом из них. Возьмем любое число из интервала $(-\infty; -1)$, например -2. $y'(-2) = 5 > 0$, поэтому на всем интервале $(-\infty; -1)$ производная $y' > 0$ и, следовательно, функция $y = x^3 + 2x^2 + x + 2$ монотонно возрастает.

Аналогично определяем знак производной y' на двух других интервалах: $y'(\frac{-2}{3}) = = -\frac{1}{3} < 0, y'(0) = 1 > 0$.

Результаты исследования занесем в таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	$1\frac{23}{27}$	$\nearrow$
y	функция возрастает	max	функция убывает	min	функция возрастает

Итак, функция возрастает на каждом из интервалов $(-\infty; \ -1)$, $(-\frac{1}{3}; \ +\infty)$ и убывает на интервале $(-1; \ -\frac{1}{3})$. В точке $x_1 = -1$ производная меняет знак с "$+$ " на " - ", следовательно $x_1 = -1$ – точка максимума функции. Значение функции в этой точке $y_{\max}(-1) = 2$.

В точке $x_2 = -\frac{1}{3}$ производная меняет знак с " $-$ "на "$+$ ", следовательно $x_2 = -\frac{1}{3}$ – точка минимума функции. Значение функции в этой точке $y_{\min}(-\frac{1}{3}) = 1\frac{23}{27}$.

5. Исследование функции по 2-й производной (выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика).

Найдем 2-ю производную функции:

$$y'' = (y')' = (3x^2 + 4x + 1)' = 6x + 4.$$

$y'' = 0$ при $x = -\frac{2}{3}$. Точек, в которых y'' не существует, нет. Точка $x = -\frac{2}{3}$ разбивает числовую ось на два интервала $(-\infty; -\frac{2}{3}), (-\frac{2}{3}; +\infty)$. Определим знак производной y'' на каждом из них. $y''(-1) = -2 < 0$, поэтому на всем интервале $(-\infty; -\frac{2}{3})$ производная $y'' > 0$ и, следовательно, график функции является выпуклым на данном интервале. Аналогично определяем, что $y'' < 0$ на интервале $(-\frac{2}{3}; +\infty)$, поэтому график вогнут на данном интервале. Результаты исследования занесем в таблицу.

x	$(-\infty; -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	$\frown$	$1\frac{25}{27}$	$\smile$
	выпуклый график	перегиб графика	вогнутый график

В точке $x = -\dfrac{2}{3}$ производная y'' меняет знак, следовательно, точка графика с координатами $x = -\dfrac{2}{3}$, $\;y = y(-\dfrac{2}{3}) = 1\dfrac{25}{27}$ является точкой перегиба графика.

6. Точки разрыва функции и вертикальные асимптоты ее графика.

Функция непрерывна на всей числовой оси, поэтому ее график не имеет вертикальных (то есть параллельных оси Oy) асимптот.

7. Невертикальные асимптоты графика функции.

Невертикальной будем называть асимптоту, не параллельную оси Oy. Выясним, имеет ли график функции невертикальную асимптоту при $x \to +\infty$. Невертикальная асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ существует тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Эта асимптота имеет уравнение $y = kx + b$. Но

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2x + 1 + \frac{2}{x}) = +\infty,$$

поэтому график функции не имеет невертикальной асимптоты при $x \to +\infty$. Аналогично убеждаемся в том, что график не имеет невертикальной асимптоты при $x \to -\infty$.

8. Построение графика функции.

На основании результатов исследования строим график функции.

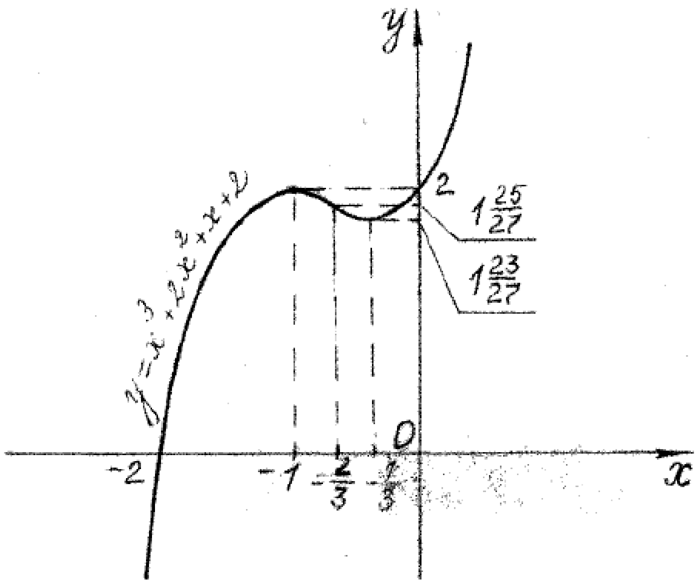

Рис.1

Заметим, что для более точного построения графика можно найти координаты еще нескольких точек графика. Например:

x	-3	$\frac{3}{2}$	1
y	-10	$1\frac{5}{8}$	6

9. Множество значений функции.

Вид графика функции (рис. 1) позволяет сделать вывод: множеством значений функции является множество всех действительных чисел.

б) $y = \dfrac{x^3}{3(4-x^2)}$.

1. Область определения функции. В область определения не входят лишь те значения x , для которых $4 - x^2 = 0$, то есть $x = -2$, $x = 2$. Поэтому $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Вид функции.

$$y(x) = \frac{x^3}{3(4-x^2)}, \quad y(-x) = -\frac{x^3}{3(4-x^2)}, \quad -y(x) = -\frac{x^3}{3(4-x^2)}.$$

Видим, что $y(-x) = -y(x)$ для любого x из области определения функции. Поэтому функция нечетная, ее график симметричен относительно начала системы координат.

3. Точки пересечения графика функции с осями координат.

Для нахождения точек пересечения графика функции с осью Ox решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = \dfrac{x^3}{3(4-x^2)}. \end{cases}$$

Отсюда получаем $x = 0, y = 0$, следовательно точка O $(0;\ 0)$ является точкой пересечения графика функции с осью Ox.

Для нахождения точки пересечения графика с осью Oy решим систему уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \dfrac{x^3}{3(4-x^2)}. \end{cases}$$

Отсюда $x = 0, y = 0$, поэтому точка $O(0;\ 0)$ является точкой пересечения графика функции с осью Oy.

4. Исследование функции по 1-й производной (интервалы монотонности, точки экстремума).

Найдем 1-ю производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^3}{3(4-x^2)}\right)' = \frac{(x^3)'(4-x^2) - x^3(4-x^2)'}{3(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{3(4-x^2)^2} = \frac{x^2(12-x^2)}{3(4-x^2)^2}.$$

$y' = 0$ при $x = 0, x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}, y'$ не существует при $x = -2, x = 2$. Точки $x_1 = -2\sqrt{3}$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 2\sqrt{3}$ разбивают числовую ось на шесть интервалов.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}; -2)$	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	$(2; 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$
y	убыв.	min	возр.	возр.		возр.	возр.	max	убыв.

Вывод: функция возрастает на каждом из интервалов $(-2\sqrt{3}; -2), (-2; 0), (0; 2), (2; 2\sqrt{3})$; функция убывает на каждом из интервалов $(-\infty; -2\sqrt{3}), (2\sqrt{3};\ +\infty)$; $x_1 = -2\sqrt{3}$– точка минимума функции, $y_{\min}(-2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$; $x_5 = 2\sqrt{3}$– точка максимума функции, $y_{\max}(2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

5. Исследование функции по 2-й производной (выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика).

Найдем 2-ю производную функции:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x^2(12 - x^2)}{3(4 - x^2)^2}\right)' = \left(\frac{12x^2 - x^4}{3(4 - x^2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(12x^2 - x^4)'(4 - x^2)^2 - (12x^2 - x^4) \cdot ((4 - x^2)^2)'}{3(4 - x^2)^4} =$$

$$= \frac{(24x - 4x^3)(4 - x^2)^2 + (12x^2 - x^4)(4 - x^2)4x}{3(4 - x^2)^4} = \frac{8x(12 + x^2)}{3(4 - x^2)^3}.$$

$y'' = 0$ при $x = 0$, y'' не существует при $x = -2$, $x = 2$. Точки $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$ разбивают числовую ось на четыре интервала. Составляем таблицу:

x	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$
y''	$+$	$-$	0	$+$	$-$
y	$\smile$	$\frown$	0	$\smile$	$\frown$
	вогнутый график	выпуклый график	перегиб графика	вогнутый график	выпуклый график

Вывод: график функции является выпуклым на каждом из интервалов $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$; график функции является вогнутым на каждом из интервалов $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$; $O(0; 0)$– точка перегиба графика.

6. Точки разрыва функции и вертикальные асимптоты ее графика.

Точки разрыва функции - это точки $x_2 = -2$ и $x_4 = 2$, в которых функция не определена. Вычислим пределы функции в точке $x_2 = -2$ слева и справа:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x^3}{3(4 - x^2)} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x^3}{3(4 - x^2)} = -\infty.$$

Поэтому прямая с уравнением $x = -2$ является вертикальной асимптотой графика функции. Аналогично, так как

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3}{3(4 - x^2)} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^3}{3(4 - x^2)} = -\infty,$$

то прямая с уравнением $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции.

7. Невертикальные асимптоты графика функции.

Вычислим пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x(4-x^2)} = \frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{4}{x^2}-1} = -\frac{1}{3} = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to+\infty}[\frac{x^3}{3(4-x^2)}+\frac{x}{3}] = \frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{4-x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}}{\frac{4}{x^2}-1} = 0 = b.$$

Так как оба предела k, b конечны, то график функции имеет невертикальную асимптоту при $x \to +\infty$. Ее уравнение $y = kx + b$, т.е. $y = -\frac{1}{3}x$.

Аналогично устанавливаем, что прямая $y = -\frac{1}{3}x$ является невертикальной асимптотой при $x \to -\infty$.

8. Построение графика функции.

На основании результатов исследования строим график функции. Нечетность функции облегчает построение графика: строим часть графика функции для значений $x \in [0, 2) \cup (2; +\infty)$, а затем отображаем эту часть графика симметрично относительно начала системы координат и получаем весь график.

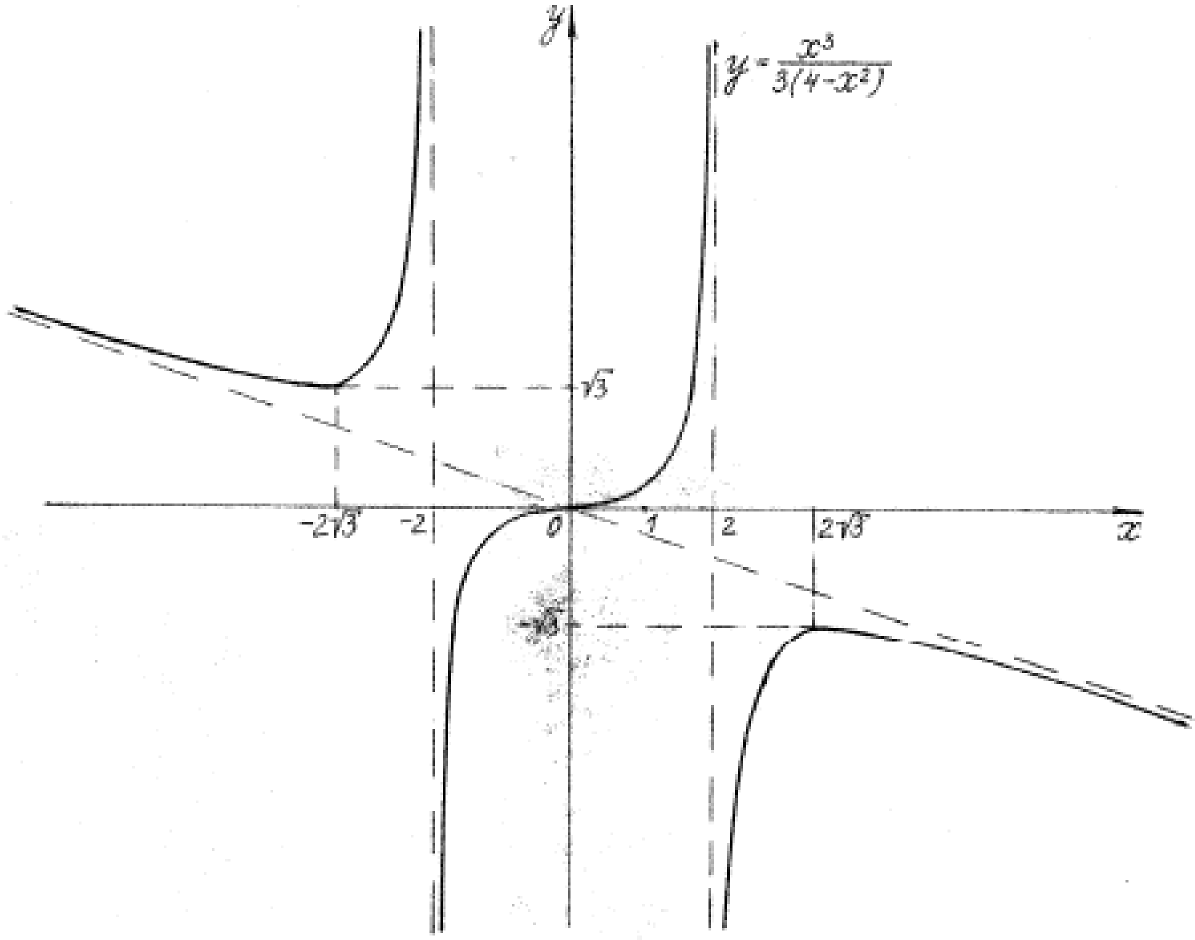

Рис. 2

9. Множество значений функции.

Вид графика функции (рис. 2) позволяет сделать вывод: множеством значений функции является множество всех действительных чисел.

$E(y) = (-\infty;+\infty)$.

2. РГР № 2 «Математическая статистика»

2.1. Теоретический материал

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 наблюдалось n_2 раз, и т. д., до x_k, которое наблюдалось n_k раз.

Составим таблицу

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

которая называется ***статистическим распределением выборки***.

Здесь x_i – ***варианты***, n_i – ***частоты***, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – ***объем выборки***.

Основные выборочные числовые характеристики:

1) **Выборочная средняя** определяется как среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i x_i .$$

2) **Выборочная дисперсия** представляет собой среднее арифметическое значение квадратов отклонений вариант от выборочной средней:

$$D_в(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 \cdot n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - \left(\overline{x}_в\right)^2 .$$

3) **Выборочное среднее квадратическое отклонение** определяется формулой:

$$\sigma_в(X) = \sqrt{D_в(X)} .$$

4) **Исправленная выборочная дисперсия:**

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в(X).$$

5) **Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение:**

$$S = \sqrt{S^2}.$$

6) **Коэффициент вариации** – выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней:

$$V = \frac{\sigma_в(X)}{\bar{x}_в} \cdot 100\%.$$

7) **Мода M_0** – значение варианты, имеющей наибольшую частоту.

8) **Медиана M_e** – значение варианты, расположенной в середине вариационного ряда:

$$M_l = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & n - нечетное \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & n - четное \end{cases}$$

Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), … , (x_n, y_n) – выборка объема n для двух случайных величин X и Y.

Выборочным коэффициентом корреляции называется величина

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_в(X) \cdot \sigma_в(Y)},$$

где $\mu_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}_в \bar{y}_в$ – выборочный корреляционный момент,

$\bar{x}_в$ и $\bar{y}_в$ – выборочные средние, $\sigma_в(X)$ и $\sigma_в(Y)$ – выборочные средние квадратические отклонения случайных величин X и Y соответственно.

Коэффициент корреляции представляет собой меру линейной зависимости случайными величинами X и Y.

Свойства коэффициента корреляции

1. Коэффициент корреляции r_{xy} является безразмерной величиной и его значение не зависит от единиц измерения случайных величин X и Y.

2. Абсолютная величина коэффициента корреляции r_{xy} не превышает единицы: $-1 \le r_{xy} \le 1$.

3. Если $0 < r_{xy} < 1$, то случайные величины X и Y положительно коррелируемы, то есть с ростом одной величины вторая в среднем также растет (прямая корреляционная зависимость).

4. Если $-1 < r_{xy} < 0$, то случайные величины X и Y отрицательно коррелируемы, то есть с ростом одной величины вторая в среднем убывает (обратная корреляционная зависимость).

5. Если $r_{xy} = 0$, то случайные величины X и Y являются некоррелированными.

6. Если $r_{xy} = \pm 1$, то между случайными величинами X и Y имеется точная линейная зависимость.

Качественная оценка корреляционной связи между случайными величинами может быть выявлена на основе *шкалы Чеддока:*

Значение $\lvert r_{xy} \rvert$	0,1 – 0,3	0,3 – 0,5	0,5 – 0,7	0,7 – 0,9	0,9 – 0,99
Теснота связи	слабая	умеренная	заметная	высокая	очень высокая

Практическая значимость коэффициента корреляции определяется его величиной, возведенной в квадрат, получившая название *коэффициента детерминации.*

Например, если $r_{xy} = 0{,}8$, то $r_{xy}^2 = 0{,}64$, т.е. 64 % всех изменений одного признака связано с изменением другого.

Доверительным интервалом статистической оценки истинного значения коэффициента корреляции нормально распределенных случайных величин X и Y является интервал

$$\left(r_{xy} - t_\gamma \cdot \frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{n}} ; r_{xy} + t_\gamma \cdot \frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{n}} \right).$$

Здесь r_{xy} – выборочный коэффициент корреляции, величина t_γ находится по таблице значений функции Лапласа (**приложение**) из условия $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$, где γ – заданный доверительный уровень.

Уравнением линейной среднеквадратической регрессии величины X на величину Y называется уравнение

$$\frac{x - \bar{x}_в}{\sigma_в \ X} = r_{xy} \cdot \frac{y - \bar{y}_в}{\sigma_в \ Y}.$$

Уравнением линейной среднеквадратической регрессии величины Y на величину X называется уравнение

$$\frac{y - \bar{y}_в}{\sigma_в \ Y} = r_{xy} \cdot \frac{x - \bar{x}_в}{\sigma_в \ X}.$$

2.2. Варианты РГР

Задание 1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n. Найти следующие выборочные числовые характеристики:

1) выборочную среднюю;
2) выборочную дисперсию;
3) выборочное среднее квадратическое отклонение;
4) исправленную выборочную дисперсию;
5) коэффициент вариации;
6) моду;
7) медиану.

Решить задачу методом условных вариант.

Вариант 1.

x_i	80	90	100	110	120	130	140
n_i	5	6	10	40	20	11	8

Вариант 2.

x_i	13,5	14,0	14,5	15,0	15,5	16,0	16,5
n_i	6	16	32	25	9	7	5

Вариант 3.

x_i	21	28	35	42	49	56	63
n_i	9	10	12	50	8	6	5

Вариант 4.

x_i	130	140	150	160	170	180	190
n_i	5	7	10	40	20	12	6

Вариант 5.

x_i	20	30	40	50	60	70	80
n_i	6	9	25	30	15	10	5

Вариант 6.

x_i	12,8	22,8	32,8	42,8	52,8	62,8	72,8
n_i	9	18	20	30	10	8	5

Вариант 7.

x_i	30	35	40	45	50	55	60
n_i	5	8	20	40	12	9	6

Вариант 8.

x_i	10,2	15,2	20,2	25,2	30,2	35,2	40,2
n_i	5	10	18	45	9	7	6

Вариант 9.

x_i	10	15	20	25	30	35	40
n_i	5	8	10	40	20	11	6

Вариант 10.

x_i	10	20	30	40	50	60	70
n_i	9	11	20	30	15	10	5

Вариант 11.

x_i	85	95	105	115	125	135	145
n_i	5	6	15	35	22	11	6

Вариант 12.

x_i	13	13,5	14	14,5	15	15,5	16
n_i	6	16	32	25	9	7	5

Вариант 13.

x_i	22	29	37	44	51	58	65
n_i	9	10	12	50	8	6	5

Вариант 14.

x_i	20	25	30	35	40	45	50
n_i	5	9	24	30	15	10	5

Вариант 15.

x_i	10	16	22	28	34	40	46
n_i	5	6	17	35	18	11	8

Задание 2. Дана таблица зависимости признака Y от признака X. Требуется:

1) на основе опытных данных вычислить выборочный коэффициент корреляции;

2) определить доверительный интервал коэффициента корреляции с надежностью (доверительный уровень) γ =0,95;

3) дать смысловую характеристику полученных результатов;

4) составить уравнение линейной среднеквадратической регрессии величины *Y* на величину *X* ;

5) построить корреляционное поле и график линейной регрессии.

Вариант 1. Распределение 100 автомобилей по температуре масла в двигателе *Y* и по скорости движения (км/ч) *X* дается в таблице:

	Y						
X	10	15	20	25	30	35	*Всего*
20	1	5					6
30		6	4				10
40			7	40	3		50
50			2	10	8		20
60				5	6	3	14
Всего	1	11	13	55	17	3	**100**

Вариант 2. Распределение 100 автомобилей по температуре смазочного масла в двигателе *X* и по температуре масла в КП *Y* дается в таблице:

	Y						
X	5	10	15	20	25	30	*Всего*
15	2	4					6
25		6	2				8
35			3	50	2		55
45			1	10	6		17
55				4	7	3	14
Всего	2	10	6	64	15	3	**100**

Вариант 3. Распределение 100 автомобилей по скорости пройденного пути *Y* и температуре смазочного материала в КП *X* дается в таблице:

	X						
Y	15	20	25	30	35	40	*Всего*
30	3	3					6
40		5	4				9
50			8	40	2		50
60			5	10	6		21
70				4	7	3	14
Всего	3	8	17	54	15	3	**100**

Вариант 4. Распределение 200 цилиндрических болванок по длине *X* (см) и по весу *Y* (кг) дается в таблице:

	Y					
X	1	1,1	1,2	1,3	1,4	*Всего*
20	4	11	1			16
22	6	11	4			21
24		9	25	5		39
26		12	18	8	2	40
28		6	18	18	14	56
30		1	2	20	5	28
Всего	10	50	68	51	21	**200**

Вариант 5. Распределение 100 сверл по твердости *Y* (HRC) и по стойкости *X* (час) дается в таблице:

	X						
Y	20	25	30	35	40	45	*Всего*
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	45	4		55
55			2	8	6		16
65				4	7	3	14
Всего	2	10	11	57	17	3	**100**

Вариант 6. Распределение 200 двигателей при испытании по длительности непрерывной работы *X* (час) и по расходу топлива *Y* (литр) дается в таблице:

	Y							
X	30	80	130	180	230	280	330	*Всего*
50	10							10
100	4	22						26
150	1	9	20					30
200			40	6				46
250			1	25	6			32
300				4	17	3		24
350				1	11	8		20
400					2	9	1	12
Всего	15	31	61	36	36	20	1	**200**

Вариант 7. Распределение 100 измерительных приборов по времени непрерывной работы *Y* (час) и количеству выполненных измерений *X* даётся в таблице:

	X					
Y	20	25	30	35	40	*Всего*
16	4	6				10
26		8	10			18
36			32	3	9	44
46			4	12	6	22
56				1	5	6
Всего	4	14	46	16	20	**100**

Вариант 8. Зависимость усилия *Y* (т/м^3) в стенке резервуара от величины гидростатического давления *X* (т/м^3) продукта дается в таблице:

	Y						
X	5	10	15	20	25	30	*Всего*
45	2	4					6
55		3	5				8
65			5	35	5		45
75			2	8	17		27
85				4	7	3	14
Всего	2	7	12	47	29	3	**100**

Вариант 9. Распределение 50 двигателей по мощности *Y* (кВт) и по числу оборотов *X* (в десятках об/мин) дается в таблице:

	Y							
X	24	25	26	27	28	29	30	*Всего*
125	1							1
126	1	2						3
127		2	4	1				7
128		1	3	5	1			10
129			2	4	5	1		12
130				2	5	2		9
131					1	3	1	5
132						1	1	2
133							1	1
Всего	2	5	9	12	12	7	3	**50**

Вариант 10. Зависимость производительности X (м^3/час) экскаватора ЭТР-162 от коэффициента прочности грунта Y (кг с/м^3) даётся в таблице:

	Y						
X	12	17	22	27	32	37	*Всего*
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	35	4		45
55			2	8	6		16
65				14	7	3	24
Всего	2	10	11	57	17	3	**100**

Вариант 11. Распределение 100 фрез по твердости Y (HRC) и по стойкости X (час) дается в таблице:

	X						
Y	25	30	35	40	45	50	*Всего*
35	4	2					6
45		5	3				8
55			5	45	5		55
65			2	8	7		17
75				4	7	3	14
Всего	4	7	10	57	19	3	**100**

Вариант 12. Распределение выносливости стали Y (кг/мм^2) в зависимости от прочности X (кг/мм^2) даётся в таблице:

	X						
Y	10	15	20	25	30	35	*Всего*
40	2	4					6
50		3	7				10
60			5	30	10		45
70			7	10	8		25
80				5	6	3	14
Всего	2	7	19	45	24	3	**100**

Вариант 13. Распределение 100 измерительных приборов по времени непрерывной работы Y (час) и количеству выполнения измерений X дается в таблице:

	X						
Y	15	20	25	30	35	40	*Всего*
15	4	1					5
25		6	4				10
35			2	50	2		54
45			1	9	7		17
55				4	3	7	14
Всего	4	7	7	63	12	7	**100**

Вариант 14. Распределение 100 предприятий по производственным средствам X (млн р.) и по суточной выработке Y (т) дается в таблице:

	Y						
X	10	15	20	25	30	35	*Всего*
50	2	2					4
60	2	4	5	6	4		21
70		2	7	12	10	4	35
80				10	10	6	26
90				8		6	14
Всего	4	8	12	36	24	16	**100**

Вариант 15. Распределение 100 станков по времени непрерывной работы Y (час) и количеству обработанных деталей X дается в таблице:

	Y						
X	12	18	24	30	36	42	*Всего*
20	2	5					7
30	4	6	3				13
40		1	8	9	3		21
50			12	16	2		30
60			2	6	4	1	13
70					7	2	9
80					1	6	7
Всего	6	12	25	31	17	9	**100**

2.3. Образец решения РГР

Задание 1.

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	10	14	23	28	12	8	5

Решение. Объем выборки

$$n=\sum_{i=1}^{k} n_i = 10+14+23+28+12+8+5=100.$$

1) **Выборочная средняя:**

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i x_i =$$

$$= \frac{10\cdot 156+14\cdot 160+23\cdot 164+28\cdot 168+12\cdot 172+8\cdot 176+5\cdot 180}{100} =$$

$$= \frac{16648}{100} = 166{,}48.$$

2) **Выборочная дисперсия** представляет собой среднюю арифметическую квадратов отклонений вариант от их выборочной средней:

$$D_в\left(X\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\overline{x}_в\right)^2\cdot n_i =$$

$$= \frac{(156-166{,}48)^2\cdot 10+(160-166{,}48)^2\cdot 14+(164-166{,}48)^2\cdot 23+}{100}$$

$$\frac{+(168-166{,}48)^2\cdot 28+(172-166{,}48)^2\cdot 12+(176-166{,}48)^2\cdot 8+(180-166{,}48)^2\cdot 5}{100} =$$

$$= \frac{3896{,}96}{100} = 38{,}97.$$

3) **Выборочное среднее квадратическое отклонение**:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{38{,}97} = 6{,}24.$$

4) **Исправленная выборочная дисперсия**:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\cdot D_в = \frac{100}{99}\cdot 38{,}97 = 39{,}36.$$

5) **Коэффициент вариации**:

$$V=\frac{\sigma_в}{x_в}\cdot 100\%=\frac{6,24}{166,48}\cdot 100\%=3,75\%.$$

6) **Мода:**

Так как $max\, n_i = 28$, то $M_0 = 168$.

7) **Медиана:**

Так как $n = 100$ (четное число), то

$$M_l=\frac{x_{\frac{100}{2}}+x_{\frac{100}{2}+1}}{2}=\frac{x_{50}+x_{51}}{2}=\frac{168+168}{2}=168.$$

Решим задачу методом условных вариант. Метод условных вариант заключается в том, что сначала вычисляют выборочную среднюю и выборочную дисперсию для условных вариант:

$$u_i=\frac{x_i-u_0}{h}\quad (i=1,2,...,k).$$

При этом u_0 и h подбирают так, чтобы условные варианты u_i были небольшими. Чаще всего за u_0 берут моду M_0, особенно простыми получаются вычисления, когда числа x_i образуют арифметическую прогрессию с разностью h.

Затем вычисляют выборочную среднюю и выборочную дисперсию для исходной варианты x по формулам:

$$\overline{x}_в=u_0+h\cdot\overline{u}_в,\qquad D_в(X)=h^2\cdot D_в(U).$$

Введем условные варианты:

$$u_i=\frac{x_i-u_0}{h},$$

где $u_0=M_0(X)=168,$ $h = 4$ (разность между соседними значениями вариант x_i).

Составим таблицу:

x_i	n_i	$u_i = \dfrac{x_i - 168}{4}$	$n_i \cdot u_i$	$n_i \cdot u_i^2$
156	10	– 3	– 30	90
160	14	– 2	– 28	56
164	23	– 1	– 23	23
168	28	0	0	0
172	12	1	12	12
176	8	2	16	32
180	5	3	15	45
–	–	–	$\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i = -38$	$\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i^2 = 258$

Вычисляем выборочные величины для условных вариант:

$$\overline{u}_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i = -\frac{38}{100} = -0{,}38;$$

$$\overline{u_в^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i^2 = \frac{258}{100} = 2{,}58;$$

Выборочные величины для исходных вариант находим по формулам:

$$\overline{x_в} = u_0 + h \cdot \overline{u_в} = 168 + 4 \cdot (-0{,}38) = 168 - 1{,}52 = 166{,}48;$$

$$D_в(X) = h^2 \cdot D_в(U) = 4^2 \cdot 2{,}4356 = 16 \cdot 2{,}4356 = 38{,}97.$$

Задание 2. Дана таблица значений температуры смазочного масла заднего моста автомобиля Y в зависимости от температуры окружающего воздуха X.

Т а б л и ц а 1

Y	4	8	12	16	12	12	12	12	16	4	12	12	12	4	8	8	4
X	5	15	15	15	35	15	35	15	35	5	15	35	25	25	25	25	25
Y	12	16	8	12	8	24	12	12	12	16	12	16	12	16	16	20	12
X	25	55	25	25	25	65	35	35	35	45	35	45	35	15	35	45	35
Y	16	12	20	16	16	20	16	20	16	20	16	20	20	20	24	20	
X	45	35	45	55	55	45	55	45	55	45	55	55	55	55	55	55	

Требуется:

1) на основе опытных данных вычислить выборочный коэффициент корреляции;
2) определить доверительный интервал коэффициента корреляции с надежностью (доверительный уровень) γ =0,95;
3) дать смысловую характеристику полученных результатов.

Решение:

Данные табл. 1 сведем в корреляционную таблицу (табл. 2)

Таблица 2

Y \ X	5	15	25	35	45	55	65	n_y
4	2		2					4
8		1	4					5
12		4	3	10				17
16		2		2	3	6		13
20					5	4		9
24						1	1	2
n_x	2	7	9	12	8	11	1	n = 50

Для упрощения вычислений перейдем к условным вариантам u_i и v_j (при этом величина коэффициента корреляции r_{xy} не изменится):

$$u_i = \frac{x_i - u_o}{h_x}, \quad v_j = \frac{y_j - v_o}{h_y}.$$

В качестве u_o выберем моду вариационного ряда случайной величины X, а в качестве v_o – моду вариационного ряда случайной величины Y.

$$u_o = M_o(X) = 35, \quad h_x = x_i - x_{i-1} = 10, \quad \text{тогда} \quad u_i = \frac{x_i - u_o}{h_x} = \frac{x_i - 35}{10};$$

$$v_o = M_o(Y) = 12, \quad h_y = y_j - y_{j-1} = 4, \text{ тогда} \quad v_j = \frac{y_j - v_o}{h_y} = \frac{y_j - 12}{4}.$$

Составим таблицу для условных вариант

Т а б л и ц а 3

V \ U	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	n_j
– 2	2		2					4
– 1		1	4					5
0		4	3	10				17
1		2		2	3	6		13
2					5	4		9
3						1	1	2
n_i	2	7	9	12	8	11	1	n = 50

Вычислим необходимые выборочные величины. Все результаты вычислений приведены в табл. 4.

Подставляя результаты вычислений в формулы, получим

$$\bar{u}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i \cdot u_i = \frac{1}{50} \cdot 4 = \frac{4}{50} = 0{,}08,$$

$$\bar{v}_в = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{6} n_j \cdot v_j = \frac{1}{50} \cdot 24 = \frac{24}{50} = 0{,}48;$$

$$\overline{u_в^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{7} n_i \cdot u_i^2 = \frac{1}{50} \cdot 116 = 2{,}32,$$

$$\overline{v_в^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{6} n_j \cdot v_j^2 = \frac{1}{50} \cdot 88 = 1{,}76$$

Т а б л и ц а 4

$V \backslash U$	-3	-2	-1	0	1	2	3	n_j	$n_j \cdot v_j$	$n_j \cdot v_j^2$
-2	2		2					4	-8	16
-1		1	4					5	-5	5
0		4	3	10				17	0	0
1		2		2	3	6		13	13	13
2					5	4		9	18	36
3						1	1	2	6	18
n_i	2	7	9	12	8	11	1	$n = 50$	$\sum = 24$	$\sum = 88$
$n_i \cdot u_i$	-6	-14	-9	0	8	22	3	$\sum = 4$		
$n_i \cdot u_i^2$	18	28	9	0	8	44	9	$\sum = 116$		
$n_{ij} \cdot u_i \cdot v_j$	12	-2	8	0	13	34	9	$\sum = 74$		

$$D_в(U) = \overline{u_в^2} - (\overline{u}_в)^2 = 2{,}32 - (0{,}08)^2 = 2{,}3136,$$

$$D_в(V) = \overline{v_в^2} - (\overline{v}_в)^2 = 1{,}76 - (0{,}48)^2 = 1{,}5296,$$

$$\sigma_в(U) = \sqrt{D_в(U)} = \sqrt{2{,}3136} = 1{,}5211,$$

$$\sigma_в(V) = \sqrt{D_в(V)} = \sqrt{1{,}5296} = 1{,}2368.$$

Тогда выборочный корреляционный момент $\mu_{uv} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - \overline{u}_в \overline{v}_в$ для условных вариант будет равен

$$\mu_{uv} = \frac{1}{50} \cdot 74 - 0{,}08 \cdot 0{,}48 = 1{,}48 - 0{,}0384 = 1{,}4416.$$

Рассчитаем выборочный коэффициент корреляции

$$r_{xy} = r_{uv} = \frac{\mu_{uv}}{\sigma_в(U) \cdot \sigma_в(V)} = \frac{1{,}4416}{1{,}5211 \cdot 1{,}2368} \approx 0{,}7663$$

Так как $r_{xy} > 0$ и $0{,}7 < r_{xy} < 0{,}9$, то можно сделать следующий вывод:

случайные величины X (температура окружающего воздуха) и Y (температура смазочного масла заднего моста автомобиля) положительно коррелируемы, то есть с ростом одной величины вторая в среднем также растет (прямая корреляционная зависимость); коэффициент корреляции показывает высокую степень связи, существующую между температурой смазочного масла и температурой окружающего воздуха.

Определим надежность (доверительный интервал) коэффициента корреляции.

В предположении, что X и Y имеют нормальное распределение (или близкое к нему), доверительный интервал имеет вид

$$\left(r_{xy} - t_\gamma \cdot \frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{n}} ; r_{xy} + t_\gamma \cdot \frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{n}} \right).$$

Величину t_γ найдем по таблице значений функции Лапласа (**приложение**) из условия $\Phi(t_\gamma) = \dfrac{\gamma}{2}$, где γ – заданный доверительный уровень (надежность).

По условию $\gamma = 0{,}95$, тогда $\Phi(t_\gamma) = \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{0{,}95}{2} = 0{,}475 \quad \Rightarrow \quad t_\gamma = 1{,}96$;

$$t_\gamma \cdot \frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{1 - 0{,}7663^2}{\sqrt{50}} \approx 0{,}1144.$$

Следовательно, доверительным интервалом коэффициента корреляции будет интервал

(0,7663 – 0,1144 ; 0,7663 + 0,1144) или (0,6519 ; 0,8807).

Это означает, что *при условиях данного опыта следует ожидать влияние температуры окружающего воздуха на температуру смазочного масла заднего моста автомобиля не менее, чем на 65,2 %.*

Вычислим выборочные величины, входящие в уравнения линейных среднеквадратических регрессий.

$$\overline{x}_в = u_0 + h_x \cdot \overline{u}_в = 35 + 10 \cdot 0{,}08 = 35{,}8,$$

$$\sigma_в \ \ X \ \ = h_x \sigma_в \ \ U \ \ = 10 \cdot 1{,}5211 = 15{,}211,$$

$$\overline{y}_в = v_0 + h_y \cdot \overline{v}_в = 12 + 4 \cdot 0{,}48 = 13{,}92,$$

$$\sigma_в \ \ Y \ \ = h_y \sigma_в \ \ V \ \ = 4 \cdot 1{,}2368 = 4{,}9472.$$

Уравнение линейной среднеквадратической регрессии величины Y на величину X принимает вид

$$\frac{y-13{,}92}{4{,}9472}=0{,}7663\cdot\frac{x-35{,}8}{15{,}211}$$

или окончательно

$$y=0{,}25x+4{,}5\,.$$

По исходным данным задачи (табл. 2) построим корреляционное поле. На координатной плоскости строим точки с координатами
(5 ; 4) , (15 ; 8) , (15 ; 12) , (15 ; 16) , (25 ; 4) , (25 ; 8) , (25 ; 12) , (35 ; 12) , (35 ; 16) , (45 ; 16) , (45 ; 20) , (55 ; 16) , (55 ; 20) , (55 ; 24) , (65 ; 24).

Затем на полученном корреляционном поле построим график линейной регрессии $y=0{,}25x+4{,}5$.

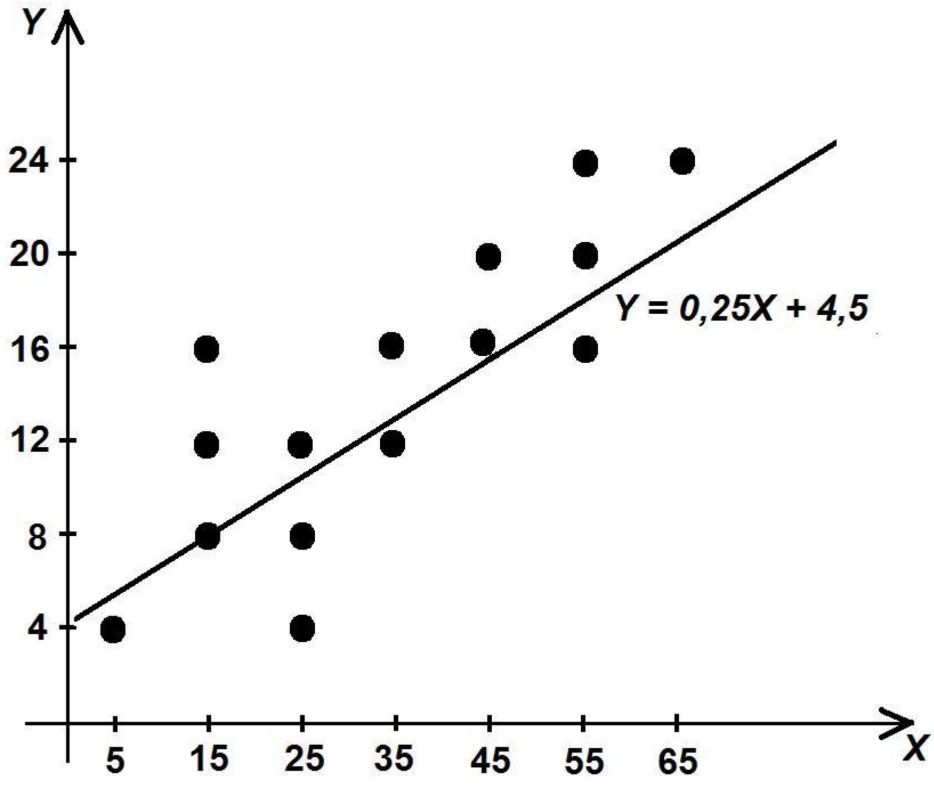

Рис. Корреляционное поле
зависимости температуры смазочного масла заднего моста автомобиля от температуры окружающего воздуха; график линейной регрессии

Вопросы для защиты РГР

1. Выборочный метод.
2. Графическое изображение эмпирических законов распределения.
3. Основные выборочные величины.
4. Простейшие свойства выборочной средней и дисперсии.
5. Метод условных вариант.
6. Понятие статистической оценки.
7. Понятие доверительного интервала.
8. Доверительные интервалы стат. оценки математического ожидания нормально распределённой случайной величины.
9. Доверительный интервал стат. оценки среднего квадратического отклонения нормально распределённой случайной величины.
10. Коэффициент корреляции, его свойства и доверительный интервал.

Библиографический список

Основная литература

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. пособие для бакалавров : рек. М-вом образования и науки Рос. Федерации в качестве учеб. пособия для студентов вузов/ В.Е. Гмурман. – 12-е изд. – М. : Юрайт, 2014. – 479 с. : – Электронная версия в ЭБС «Юрайт»

Дополнительная литература

1. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие для прикладного бакалавриата : рек. М-вом образования и науки Рос. Федерации в качестве учеб. пособия для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2014. – 404 с. – Электронная версия в ЭБС «Юрайт»

2. Сапронов, И.В. Математическая статистика [Электронный ресурс] : лабораторный практикум / И.В. Сапронов, Е.О. Уточкина, А.И. Фурменко ; ВГЛТА. – Воронеж, 2014.– Электронная версия в ЭБС ВГЛТУ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.31	0.1217	0.62	0.2324	0.93	0.3238
0.01	0.0040	0.32	0.1255	0.63	0.2357	0.94	0.3264
0.02	0.0080	0.33	0.1293	0.64	0.2389	0.95	0.3289
0.03	0.0120	0.34	0.1331	0.65	0.2422	0.96	0.3315
0.04	0.0160	0.35	0.1368	0.66	0.2454	0.97	0.3340
0.05	0.0199	0.36	0.1406	0.67	0.2486	0.98	0.3365
0.06	0.0239	0.37	0.1443	0.68	0.2517	0.99	0.3389
0.07	0.0279	0.38	0.1480	0.69	0.2549	1.00	0.3413
0.08	0.0319	0.39	0.1517	0.70	0.2580	1.01	0.3438
0.09	0.0359	0.40	0.1554	0.71	0.2611	1.02	0.3461
0.10	0.0398	0.41	0.1591	0.72	0.2642	1.03	0.3485
0.11	0.0438	0.42	0.1628	0.73	0.2673	1.04	0.3508
0.12	0.0478	0.43	0.1664	0.74	0.2703	1.05	0.3531
0.13	0.0517	0.44	0.1700	0.75	0.2734	1.06	0.3554
0.14	0.0557	0.45	0.1736	0.76	0.2764	1.07	0.3577
0.15	0.0596	0.46	0.1772	0.77	0.2794	1.08	0.3599
0.16	0.0636	0.47	0.1808	0.78	0.2823	1.09	0.3621
0.17	0.0675	0.48	0.1844	0.79	0.2852	1.10	0.3643
0.18	0.0714	0.49	0.1879	0.80	0.2881	1.11	0.3665
0.19	0.0753	0.50	0.1915	0.81	0.2910	1.12	0.3686
0.20	0.0793	0.51	0.1950	0.82	0.2939	1.13	0.3708
0.21	0.0832	0.52	0.1985	0.83	0.2967	1.14	0.3729
0.22	0.0871	0.53	0.2019	0.84	0.2995	1.15	0.3749
0.23	0.0910	0.54	0.2054	0.85	0.3023	1.16	0.3770
0.24	0.0948	0.55	0.2088	0.86	0.3051	1.17	0.3790
0.25	0.0987	0.56	0.2123	0.87	0.3078	1.18	0.3810
0.26	0.1026	0.57	0.2157	0.88	0.3106	1.19	0.3830
0.27	0.1064	0.58	0.2190	0.89	0.3133	1.20	0.3849
0.28	0.1103	0.59	0.2224	0.90	0.3159	1.21	0.3869
0.29	0.1141	0.60	0.2257	0.91	0.3186	1.22	0.3883
0.30	0.1179	0.61	0.2291	0.92	0.3212	1.23	0.3907

Окончание приложения

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.24	0.3925	1.59	0.4441	1.93	0.4732	2.54	0.4945
1.25	0.3944	1.60	0.4452	1.94	0.4738	2.56	0.4948
1.27	0.3980	1.61	0.4463	1.95	0.4744	2.58	0.4951
1.28	0.3997	1.62	0.4474	1.96	0.4750	2.60	0.4953
1.29	0.4015	1.63	0.4484	1.97	0.4756	2.62	0.4956
1.30	0.4032	1.64	0.4495	1.98	0.4761	2.64	0.4959
1.31	0.4049	1.65	0.4505	1.99	0.4767	2.66	0.4961
1.32	0.4066	1.66	0.4515	2.00	0.4772	2.68	0.4963
1.33	0.4082	1.67	0.4525	2.02	0.4783	2.70	0.4965
1.34	0.4099	1.68	0.4535	2.04	0.4793	2.72	0.4967
1.35	0.4115	1.69	0.4545	2.06	0.4803	2.74	0.4969
1.36	0.4131	1.70	0.4554	2.08	0.4812	2.76	0.4971
1.37	0.4147	1.71	0.4564	2.10	0.4821	2.78	0.4973
1.38	0.4162	1.72	0.4573	2.12	0.4830	2.80	0.4974
1.39	0.4177	1.73	0.4582	2.14	0.4838	2.82	0.4976
1.40	0.4192	1.74	0.4591	2.16	0.4846	2.84	0.4977
1.41	0.4207	1.75	0.4599	2.18	0.4854	2.86	0.4979
1.42	0.4222	1.76	0.4608	2.20	0.4861	2.88	0.4980
1.43	0.4236	1.77	0.4616	2.22	0.4868	2.90	0.4981
1.44	0.4251	1.78	0.4625	2.24	0.4875	2.92	0.4982
1.45	0.4265	1.79	0.4633	2.26	0.4881	2.94	0.4984
1.46	0.4279	1.80	0.4641	2.28	0.4887	2.96	0.4985
1.47	0.4292	1.81	0.4649	2.30	0.4893	2.98	0.4986
1.48	0.4306	1.82	0.4656	2.32	0.4898	3.00	0.49865
1.49	0.4319	1.83	0.4664	2.34	0.4904	3.20	0.49931
1.50	0.4332	1.84	0.4671	2.36	0.4909	3.40	0.49966
1.51	0.4345	1.85	0.4678	2.38	0.4913	3.60	0.49984
1.52	0.4357	1.86	0.4686	2.40	0.4918	3.80	0.499928
1.53	0.4370	1.87	0.4693	2.42	0.4922	4.00	0.499968
1.54	0.4382	1.88	0.4699	2.44	0.4927	4.50	0.499997
1.55	0.4394	1.89	0.4706	2.46	0.4931	5.00	0.499997
1.56	0.4406	1.90	0.4713	2.48	0.4934		
1.57	0.4418	1.91	0.4719	2.50	0.4938		
1.58	0.4429	1.92	0.4726	2.52	0.4941		